

✓ النهايات :

حالات عدم التعيين هي : $0 \times \infty$, $-\infty + \infty$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{0}{0}$

حساب النهايات في القيم الانتهائية $(\pm \infty)$

- نهاية الدالة ناطقة تؤل إلى حساب نهاية أكبر حد في البسط على أكبر حد في المقام
- نهاية الدالة كثير حدود تؤل إلى حساب نهاية أكبر حد

ملاحظة:

أثناء حساب النهايات يمكن الوقوع في حالة عدم التعيين ، ولا توجد قاعدة عامة لإزالة حالة عدم التعيين ، فهناك عدة طرق مثل إستخراج العامل المشترك أو الضرب والقسمة في المرافق ... إلخ .

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = +\infty - \infty \text{ ح.ع.ت}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \text{ (أ)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \times \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}$$

نضرب ونقسم على المرافق نحصل على :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x + 1} + 2x = +\infty - \infty \text{ ح.ع.ت}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} + 2x \text{ (ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} + 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-x \times \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 \right) \right)$$

نقوم بإخراج x عامل مشترك :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -(-\infty) \times \left(\sqrt{1 - \frac{1}{+\infty} + \frac{1}{+\infty^2}} - 2 \right) = +\infty \times (\sqrt{1} - 2) = +\infty \times (-1) = -\infty$$

✓ إزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

وفي هذه الحالة نقوم بتحليل كلا من البسط والمقام باستعمال القسمة الإقليدية إذا كانت الدالة هي حاصل قسمة كثير حدود على كثير حدود ثم نختزل العامل المشترك في البسط والمقام ونحسب النهاية

$$\lim_{x \rightarrow +1} f(x) = \lim_{x \rightarrow +1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1^2 - 3 \times 1 + 2}{1^2 + 2 \times 1 - 3} = \frac{0}{0} \text{ ح.ع.ت}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3} = ? \text{ مثال :}$$

نقوم بتحليل كل من البسط والمقام :

$$\lim_{x \rightarrow +1} f(x) = \lim_{x \rightarrow +1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow +1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow +1} \frac{(x-2)}{(x+3)} = \frac{(1-2)}{(1+3)} = -\frac{1}{4}$$

أما إذا كانت الدالة تحتوي على الجذر نقوم بالضرب والقسمة في المرافق وبعد التبسيط نحسب النهاية .

$$\lim_{x \rightarrow +4} f(x) = \lim_{x \rightarrow +4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{\sqrt{4} - 2}{4 - 4} = \frac{0}{0} \text{ ح.ع.ت}$$

$$\lim_{x \rightarrow +4} f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \text{ مثال :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +4} f(x) = \lim_{x \rightarrow +4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow +4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow +4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

نضرب ونقسم على مرافق المقام :

$$\lim_{x \rightarrow +4} f(x) = \lim_{x \rightarrow +4} \frac{1}{(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow +4} f(x) = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

✓ حساب النهايات باستعمال الحصر

اثناء حساب نهاية دالة يمكن الجوء إلى قاعدة الحصر أي حصر الدالة بين دالتين لهما نفس النهاية وبالتالي فإن نهايتها من نهاية الدالتين وفي اغلب الأحيان نلجأ إلى هذه الطريقة في الدوال التي تحتوي على الدوال المثلثية (sin , cos)

مثال: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\cos x}{x}$

نعلم أن $-1 \leq \cos x \leq 1$ ومنه $\frac{-1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$

ومنه $0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} \leq 0$ إذن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

✓ حساب النهايات باستعمال المقارنة

(1) f, g دالتان إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \geq g(x)$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) f, g دالتان إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \leq g(x)$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

✓ حساب النهايات باستعمال العدد المشتق

مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ ح.ع.ب $\frac{0}{0}$ نضع $f(x) = \sin x$ ومنه $f'(x) = \cos(x)$

استعمال تعريف العدد المشتق $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \cos(0) = 1$

✓ حساب النهايات باستعمال النهاية الشهيرة

يمكن حساب النهايات باستعمال النهاية الشهيرة $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = ?$ نضرب ونقسم على 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(2x)}{(2x)} = 2 \times 1 = 2$

✓ المستقيمات المقاربة:

(1) **المستقيم المقارب العمودي**: (الموازي لمحور الترتيب)

إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ فإن تفسيره البياني هو: أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته: $x = a$

(2) **المستقيم المقارب الأفقي**: (الموازي لمحور الفواصل)

إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ فإن تفسيره البياني هو: أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته: $y = b$ وذلك بجوار ∞

(3) **المستقيم المقارب المائل**:

أ- لإثبات أن مستقيم $y = ax + b$ (Δ) مستقيم مقارب مائل بجوار ∞ يكفي أن نثبت أن: $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

التفسير الهندسي لـ $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ هو أن $y = ax + b$ (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار ∞

التفسير الهندسي لـ $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = L$ هو أن $y = ax + b + L$ (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار ∞

ب- إذا لم تعط لنا معادلة المستقيم المقارب المائل، وطلب منا تعينه، ننظر إلى عبارة $f(x)$ ، فإذا كانت مكتوبة على الشكل

التالي: $f(x) = ax + b + g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ فالمستقيم ذو المعادلة: $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)

عند ∞

ج- إذا لم تتوفر الملاحظة السابقة، نعين المستقيم المقارب المائل كمايلي: نحسب $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ ، فنجد عددا حقيقيا a غير

معدوم، ثم نحسب $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$ ، فنجد عددا حقيقيا b وتكون معادلة المستقيم المقارب المائل هي: $y = ax + b$

✓ الإستمرارية

f مستمرة عند a يعني أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

التفسير الهندسي للدالة المستمرة على مجال I :

تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد).

خواص

أ- كل الدوال المقررة في هذا المستوى مستمرة على مجال تعريفها.

ب- الدوال المرجعية مستمرة على مجال تعريفها.

ج- مجموع وجداء دوال مستمرة هي دالة مستمرة

الاستمرارية من اليمين ومن اليسار

أ- f مستمرة على يمين x_0 يعني $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

ب- f مستمرة على يسار x_0 يعني $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

مبرهنة القيم المتوسطة

f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a; b]$. من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = k$

طريقة 1:

لإثبات أن f تقبل حل وحيد c على المجال $[a; b]$ يحقق $f(c) = k$ يكفي أن نثبت أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على

مجال $[a; b]$ و $f(a) < k < f(b)$ أو $(f(a) - k)(f(b) - k) < 0$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $y = k$ يقطع المنحني (C_f) في نقطة أو أكثر على المجال $[a; b]$

حالة خاصة ($k = 0$)

لإثبات أن f تقبل حل وحيد α على المجال $[a; b]$ يحقق $f(\alpha) = 0$ يكفي أن نثبت أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما

على مجال $[a; b]$ و $f(a) < 0 < f(b)$ أو $f(a) \times f(b) \leq 0$

التفسير الهندسي: المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة من المجال $[a; b]$

✓ الاشتقاقية:

1. قابلية للاشتقاق عند عدد و العدد المشتق.

f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$. عدد x_0 من D_f . القول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 معناه الدالة :

$$g: h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ تقبل نهاية حقيقية } l \text{ عند } 0. \text{ أي } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L$$

يسمى l العدد

المشتق للدالة f في العدد x_0 . و نرمز له بـ $f'(x_0)$.

2. الدالة المشتقة لدالة f .

f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$. نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من D_f . تسمى الدالة التي تفرق بكل x من D_f العدد المشتق $f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f على D_f .

ويرمز لها بـ f' . و نكتب $f': x \rightarrow f'(x)$

3. تطبيقات الاشتقاقية.

1.3 اتجاه تغير دالة:

لتكن دالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال D_f و f' دالتها المشتقة

- إذا كانت f' موجبة تماما (يمكن أن تكون f' معدومة من أجل قيم منعزلة من D_f) على المجال D_f فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال D_f .
- إذا كانت f' سالبة تماما (يمكن أن تكون f' معدومة من أجل قيم منعزلة من D_f) على المجال D_f فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال D_f .
- إذا كانت f' معدومة على المجال D_f فإن الدالة f ثابتة على المجال D_f .

2.3 القيم الحدية المحلية لدالة:

لتكن دالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة.

- إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فإنه يوجد مجال مفتوح I' محتوي في I يشمل c تقبل فيه f قيمة حدية $f(c)$. تسمى $f(c)$ قيمة حدية محلية

✓ نقطة الإنعطاف :

بصفة عامة ، لتعين نقطة الإنعطاف، نقوم بمايلي :

نحسب المشتقة الثانية $f''(x)$ ، وندرس إشارتها ، فإذا وجدنا انها تنعدم من اجل قيمة x_0 من D_f مغيرتا إشارتها ، فتكون عندئذ النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة إنعطاف لـ (C_f)

حالات خاصة :

أ- في بعض الحالات ، يمكن تعيين نقطة الانعطاف دون اللجوء إلى المشتقة الثانية $f''(x)$ ، وذلك عندما تنعدم المشتقة الأولى $f'(x)$ من اجل قيمة x_0 من D_f ولم تغير إشارتها ، فتكون النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة انعطاف لـ (C_f)

ب- إذا كانت : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ أو $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$

فالتفسير الهندسي هو أن النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة إنعطاف لـ (C_f) (في هذه الحالة المماس يكون موازيا لمحور الترتيب)

ج- إذا درسنا الوضع النسبي للمماس والمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 ووجدنا أن المنحنى غير وضعيته بالنسبة للمماس في نقطة ألتماس فنستنتج أن النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة انعطاف لـ (C_f)

✓ معادلة المماس :

هناك ستة صيغ تقريبا لطرح سؤال معادلة المماس ، لكن تبقى معرفة فاصلة التماس x_0 هي مفتاح الإجابة لكل منها

الصيغة الأولى :

اكتب معادلة المماس (C_h) للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة x_0

الإجابة : نكتب الدستور : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ حيث نعوض x_0 بقيمتها المعطاة.

الصيغة الثانية : اكتب معادلة المماس لمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الترتيب y_0

الإجابة : نحل المعادلة $y_0 = f(x_0)$ وعندا إيجاد قيمة x_0 نكون قد عدنا إلى الحالة الأولى

الصيغة الثالثة : بين انه يوجد مماس أو أكثر للمنحنى (C_f) معامل توجيهه a (ميله).

الإجابة : نحل المعادلة المعادلة $f'(x) = a$ وعندا تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عدنا على الحالة الأولى

ملاحظة : عدد الحلول يدل على عدد المماسات

الصيغة الرابعة : بين انه يوجد مماس أو أكثر للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$

الإجابة : نحل المعادلة المعادلة $f'(x) = a$ ، عدنا إلى الحالة الثانية

الصيغ الخامسة : بين انه يوجد مماس أو أكثر للمنحنى (C_f) يعامد المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$

الإجابة : نحل المعادلة $af'(x) = -1$ ونكون قد عدنا إلى الحالة الأولى

الصيغة السادسة : بين أنه يوجد مماس أو أكثر للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ذات الإحداثيات $(\alpha; \beta)$

الإجابة : نحل المعادلة $f'(x_0)(\alpha - x_0) + f(x_0) = \beta$ وعندا تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عدنا على الحالة الأولى

✓ النقطة الزاوية إذا كان : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L'$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L$

حيث L و L' عدنان حقيقيان ($L \neq L'$) ، فالتفسير الهندسي هو أن النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة زاوية للمنحنى

ملاحظة 1 :

قد تكتب النهايتين السابقتين على الشكل التالي : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L'$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$

ملاحظة 2: معادلنا نصفي المماسين عند النقطة الزاوية هما : $\begin{cases} y = L(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$ و $\begin{cases} y = L'(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$

ملاحظة 3: تبقى النقطة الزاوية أيضا موجودة حتى ولو كانت إحدى النهايتين السابقتين عددا حقيقيا والأخرى $\pm \infty$

✓ استنتاج تمثيل بياني من آخر

بعد إنشاء (C_f) قد يطلب منا ان نستنتج منحنى اخر (C_h) منحنى الدالة h ويكون الإستنتاج حسب صيغة السؤال .

1) الصيغة الأولى : استنتاج (C_h) منحنى الدالة الدالة h التي تحقق : $h(x) = f(x + a) + b$ ، حيث a و b عدنان حقيقيان

الإجابة : نستنتج (C_h) من (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} -a \\ +b \end{pmatrix}$

2) الصيغة الثانية : استنتاج (C_h) منحنى الدالة h حيث $h(x) = |f(x)|$

الإجابة :

أ- على المجالات التي تكون فيها $f(x) \geq 0$ (يكون فيها (C_f) على محور الفواصل أو فوقه) نحصل على $h(x) = f(x)$ ومنه C_h ينطبق على C_f

ب- على المجالات التي تكون فيها $f(x) \leq 0$ (يكون فيها (C_f) على محور الفواصل أو تحته) نحصل على $h(x) = -f(x)$ ومنه يكون (C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل.

(3) الصيغة الثالثة: استنتج (C_h) منحنى الدالة h حيث: $h(x) = f(|x|)$.

الإجابة:

(1) على المجال $[0; +\infty[$ ينطبق (C_h) على (C_f)

(2) على المجال $]-\infty; 0]$ يكون (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب

(4) الصيغة الرابعة: (الدالة الزوجية)

إذا كانت الدالة f دالة زوجية $(f(x) = f(-x))$ فإن منحناها البياني يكون متناظر بالنسبة لمحور الترتيب ، يكفي ان نرسم المنحنى على المجال $[0; +\infty[$ ، ثم نكمل الجزء المتبقي بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب

(5) الصيغة الخامسة: (الدالة الفردية)

إذا كانت الدالة f دالة فردية $(f(x) = -f(-x))$ فإن منحناها البياني يكون متناظر بالنسبة إلى مركز المعلم ، يكفي ان نرسم المنحنى على المجال $[0; +\infty[$ ، ثم نكمل الجزء المتبقي بالتناظر بالنسبة لمبدأ المعلم.

✓ دساتير تغير المعلم:

(1) محور التناظر:

أ- α عدد حقيقي و f دالة ، لإثبات أن المستقيم $x = \alpha$ محور تناظر للمنحنى (C_f) يكفي ان نثبت انه من اجل كل x من D_f فإن $2\alpha - x$ من D_f و $f(2\alpha - x) = f(x)$ أو $f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$

ب- نستعمل دساتير تغير المعلم ونثبت أن الدالة زوجية

(2) مركز التناظر: α, β عدنان حقيقيان f و دالة ،

أ- لإثبات أن النقطة $w(\alpha; \beta)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) يكفي ان نثبت انه من اجل كل x من D_f فإن

$2\alpha - x$ من D_f و $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$ أو $f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2\beta$

ب- نستعمل دساتير تغير المعلم ونثبت أن الدالة فردية

✓ نقاط التقاطع مع المحاور:

(1) تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل:

لتعين نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل ، نحل المعادلة $f(x) = 0$ إذا أمكن حيث: $x \in D_f$.

(2) تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب:

f دالة حيث $0 \in D_f$ لتعين نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب نجد صورة الصفر $(y = f(0))$ وتكون نقطة

التقاطع هي: $(0; f(0))$

✓ الوضع النسبي لمنحنى ومستقيم

لدراسة الوضع النسبي لمنحنى (C_f) والمستقيم $y = ax + b$ (Δ) نقوم بدراسة الفرق $f(x) - y$

• إذا كان $f(x) - y < 0$ فإن (C_f) تحت المستقيم (Δ)

• إذا كان $f(x) - y = 0$ فإن (C_f) يقطع المستقيم (Δ)

• إذا كان $f(x) - y > 0$ فإن (C_f) فوق المستقيم (Δ)